MA 1 - Domácí úkol 1 - řešení

1. Upravte, najděte definiční obor funkce f a nakreslete její graf, když

$$f(x)=\sqrt{x^2-\frac{2x^3+3x^2-1}{x^2+2x+1}}\ .$$

Výsledek: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}\ (=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty))\ ;\ f(x)=|x-1|\ ,\ x\neq 1\ ,$

2. Najděte všechna reálná čísla, která vyhovují nerovnici

$$\frac{1}{2x-1}\geq\frac{1}{x+4}\ .$$

Výsledek: $x\in(-\infty,-4)\cup(\frac{1}{2},5\rangle\ ,$

3. V oboru reálných čísel řešte soustavu nerovnic

$$|x+1|\leq 2,\quad |x-1|\geq 3\ .$$

Výsledek: $x\in\langle -3,-2\rangle$

4. V intervalu $\langle\, 0, 2\pi\,)$ řešte rovnici $\qquad 2\cot g^2 x=\dfrac{3}{\sin x}$

Výsledek: $x_1=\frac{\pi}{6}\ ,\ x_2=\frac{5}{6}\pi\ .$

5. V oboru reálných čísel řešte nerovnici (log je dekadický logaritmus)

$$\frac{1}{\log x}\geq\log x\ .$$

Výsledek: $x\in(0,\frac{1}{10}\rangle\cup(1,10\rangle$

6. Nakreslete grafy funkcí :

$$f(x)=-x^2-4x-5;\quad g(x)=-1+\sqrt{x+4};\quad h(x)=\ln|x-1|;\quad k(x)=-e^{|x|}\ .$$

Pokud existují průsečíky grafu s osami, popište je.

7. Ukažte, že k funkci $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ existuje v jejím definičním oboru inverzní funkce. Najděte tuto inverzní funkci a nakreslete její graf .

Výsledek: $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}\ ,\ x\neq 1\ .$

Řešení domácího úkolu 1.

(1.) $f(x) = \sqrt{x^2 - \dfrac{2x^3+3x^2-1}{x^2+2x+1}}$, „upravíme":

$$\sqrt{x^2 - \frac{2x^3+3x^2-1}{x^2+2x+1}} = \sqrt{\frac{x^4+2x^3+x^2-2x^3-3x^2+1}{(x+1)^2}} = \sqrt{\frac{x^4-2x^2+1}{(x+1)^2}} =$$

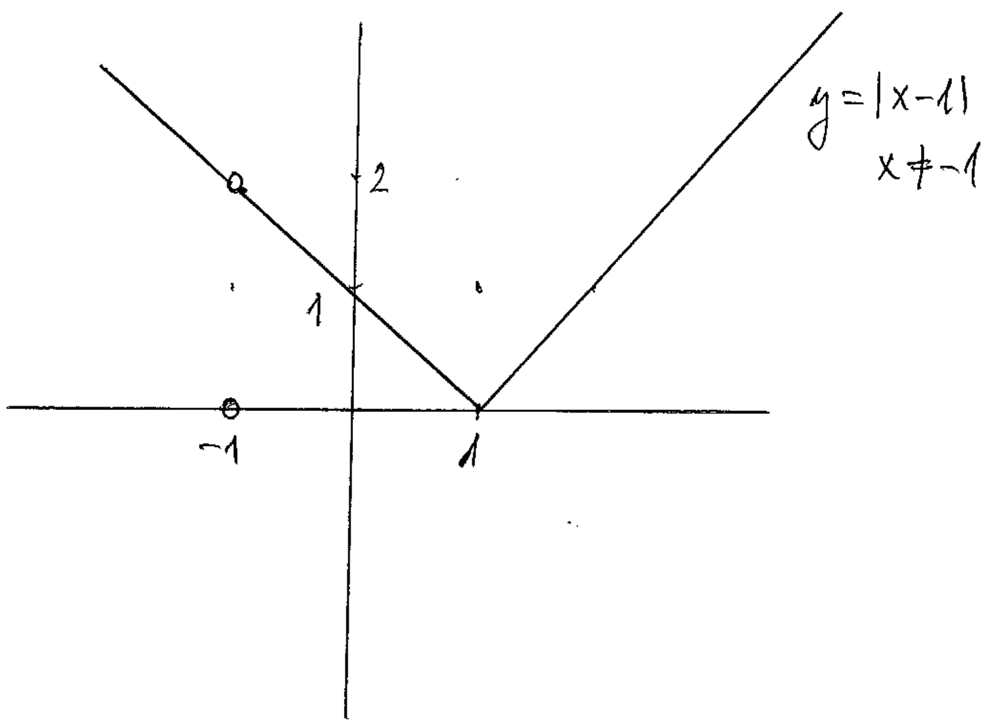
$$= \underbrace{\sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{(x+1)^2}}}_{(**)} = \sqrt{\frac{(x-1)^2(x+1)^2}{(x+1)^2}} = \sqrt{(x-1)^2} \overset{(*)}{=} |x-1|$$

Poznámky: 1) $\sqrt{a^2} = |a|$ pro úpravu (*)

2) „vidíme", že jmenovatel v zadání $f(x)$ je $(x+1)^2$, tedy $x \neq -1$, a pod odmocninou je pro $x \neq -1$ výraz $\dfrac{(x^2-1)^2}{(x+1)^2} \geq 0$, tj. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (**)

tj. $f(x) = |x-1|$ pro $x \neq -1$

graf:



① Řešení nerovnice $\frac{1}{2x-1} \geqq \frac{1}{x+4}$ (1)

(1) $\Leftrightarrow \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{x+4} \geqq 0 \Leftrightarrow \frac{x+4-(2x-1)}{(2x-1)(x+4)} \geqq 0$

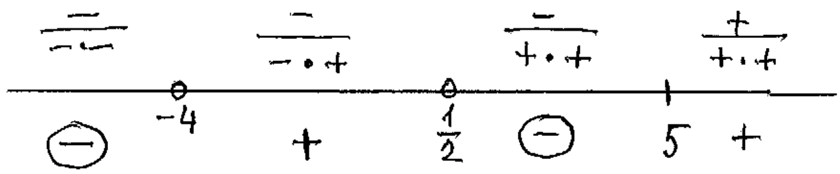
$x \neq \frac{1}{2}, -4$

$\Leftrightarrow \frac{-x+5}{(2x-1)(x+4)} \geqq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x-5}{(2x-1)(x+4)} \leqq 0$ (*)

Rozhodování o znaménku zlomku:
zlomek může měnit znaménko jen v bodech, kde znaménko mění činitelé $(x-5)$, $(2x-1)$, $(x+4)$, tj. v bodech $x=5$ (může být), a $x=\frac{1}{2}$, $x=-4$ (nejsou v oboru, kde je zlomek v (*) definován):

„Schema" (například, můžete hledat řešení (*) i „jinak"):



tedy, úlohu (1) řeší $x \in (-\infty, -4) \cup (\frac{1}{2}, 5\rangle$

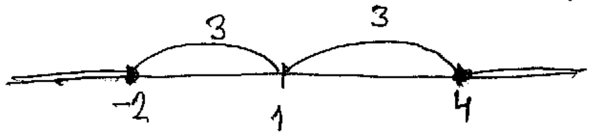
③ Řešení soustavy nerovnic $|x+1| \leqq 2$, $|x-1| \geqq 3$: (1)

$x \in R$ bude řešením soustavy (1), když bude platit

$|x+1| \leqq 1$ a současně ($\wedge$) $|x-1| \geqq 3$, tj.

(„když vzdálenost x od bodu -1 bude menší nebo rovna 2") $\wedge$ vzdálenost x od bodu 1 bude větší nebo rovna 3, tj.

$\wedge$



$x \in \langle -3, 1\rangle$ $\wedge$ $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 4, +\infty)$

tj. $x \in \langle -3, 1\rangle \cap \left((-\infty, -2\rangle \cup \langle 4, +\infty) \right) \Leftrightarrow$

$x \in \langle -3, -2\rangle$

(4) v intervalu $\langle 0, 2\pi)$ máme řešit rovnici

$$2\cot g^2 x = \frac{3}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad x \neq 0,\ x \neq \pi$$

$(\sin x \neq 0)$

a upravíme: $2\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{3}{\sin x} \quad \Big| \cdot \sin^2 x$

$$2\cos^2 x = 3\sin x$$

užijeme ($\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$)

pak $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

a substitucí $\sin x = y$: $\quad 2y^2 + 3y - 2 = 0 \qquad (D = 3^2 + 4.4)$

$$y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \left\langle \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{matrix} \right.$$

Protože $|\sin x| \leq 1$, řešíme jen rovnici (v $\langle 0, 2\pi)$)

$\sin x = \frac{1}{2}$, a to v $\langle 0, 2\pi)$ řeší

$$x_1 = \frac{\pi}{6} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{5}{6}\pi$$

(5) Máme řešit nerovnici $\dfrac{1}{\log x} \geqq \log x \qquad (1)$

($\log x$ je dekadický logaritmus)

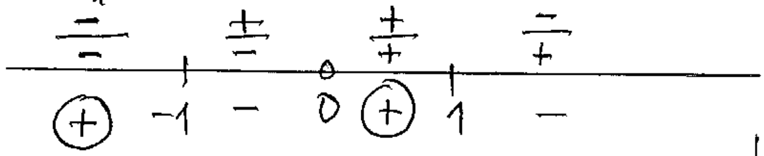
opět (pro $\log x \neq 0$, tj. $x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$) převedeme (1) na nerovnici s „pravou stranou nulovou" („a sečteme")

$$(*) \iff \frac{1 - \log^2 x}{\log x} \geqq 0 \qquad (2)$$

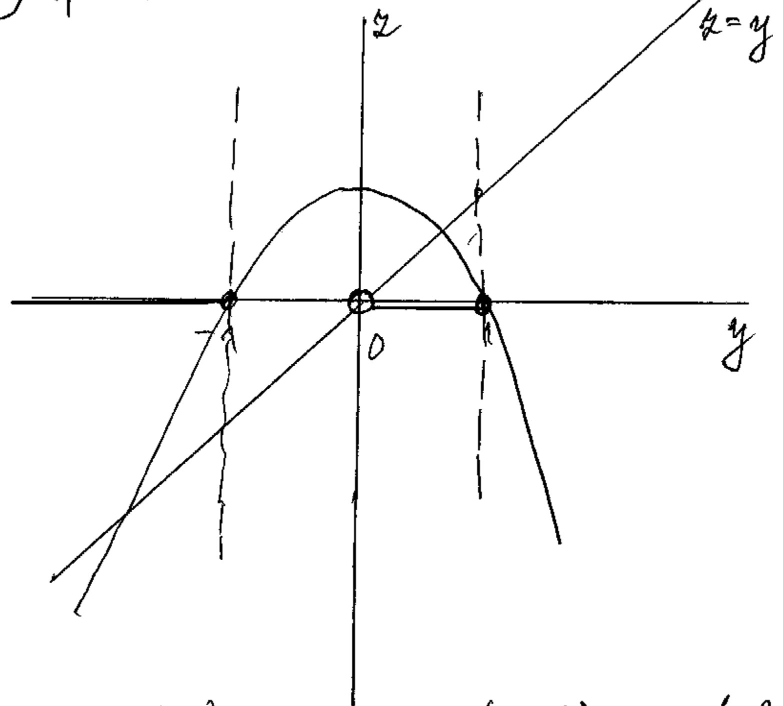
nelžeme zjednodušit nerovnici (2) substitucí $\log x = y$ na nerovnici $\dfrac{1 - y^2}{y} \geqq 0 \quad (3)$:

Řešení (3): $y \neq 0$ a $y \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 0, 1\rangle$:

buď „schématem“ znamének (nulové body čitatele $y = \pm 1$, jmenovatel $y = 0$)



nebo graficky:



tedy, $y \in (-\infty, -1\rangle$ (nebo) $\vee$ $y \in (0, 1\rangle$, tedy

$\log x \leq -1$ $\vee$ $0 < \log x \leq 1$

tj. $0 < x \leqq 10^{-1}$ $\vee$ $1 < x \leq 10^{1}$

(uvědomme: $\log x = y \Leftrightarrow x = 10^{y}$)

tj. $x \in (0, \frac{1}{10}\rangle$ $\vee$ $x \in (1, 10\rangle$, tj.

$x \in (0, \frac{1}{10}\rangle \cup (1, 10\rangle$

6. grafy funkcí:

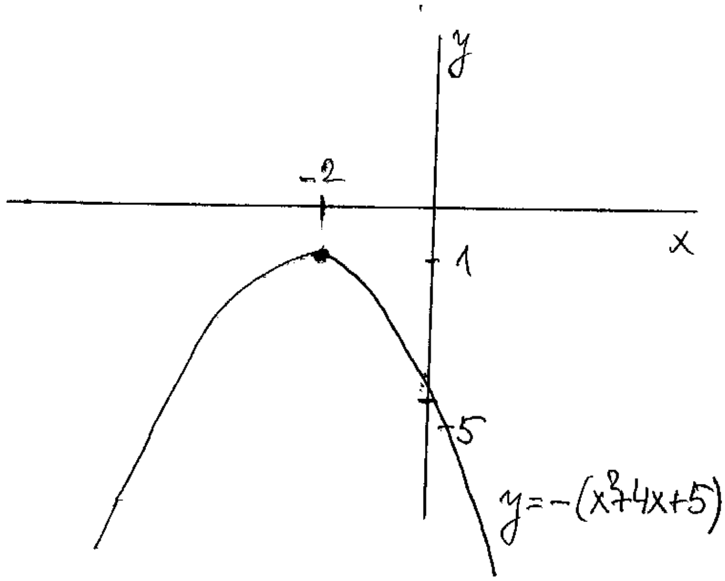
a) $f(x) = -(x^2+4x+5)$

$(= -[(x+2)^2+1]$

$= -(x+2)^2-1)$

- parabola, vrchol $V[-2,-1]$

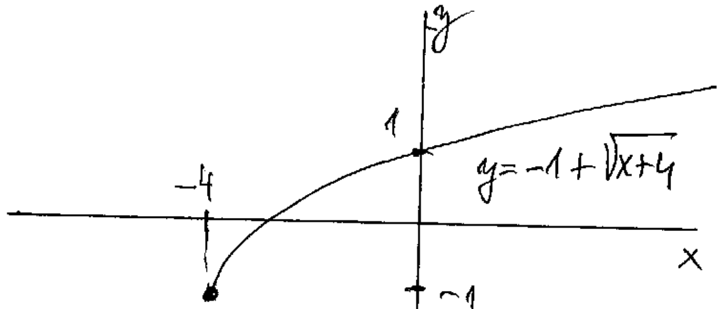
$f(0)=-5$



b) $g(x) = -1+\sqrt{x+4}$

graf „posunutý" graf $y=\sqrt{x}$, $x \geq -4$ a o „-1" dolů

$g(0)=1$, $g(-4)=-1$

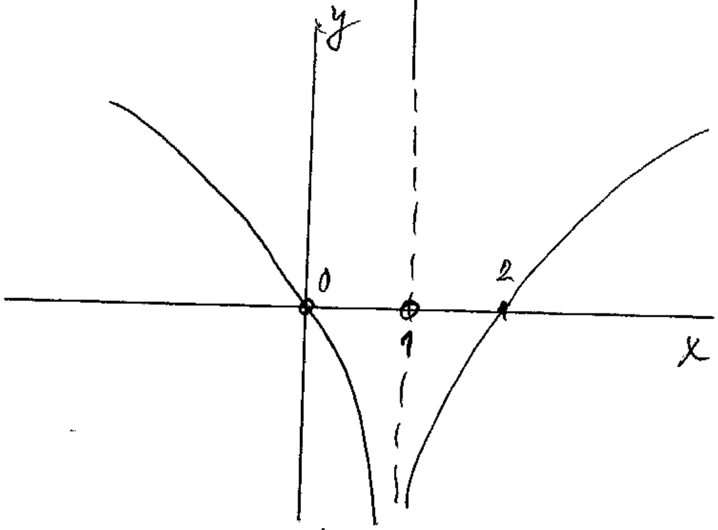


c) $h(x) = \ln|x-1|$

$Dh = R \setminus \{1\}$,

$h(0)=0$, $h(2)=0$

- „posunutí" grafu fce $\ln|x|$ o „1" vpravo



d) $k(x) = -e^{|x|}$

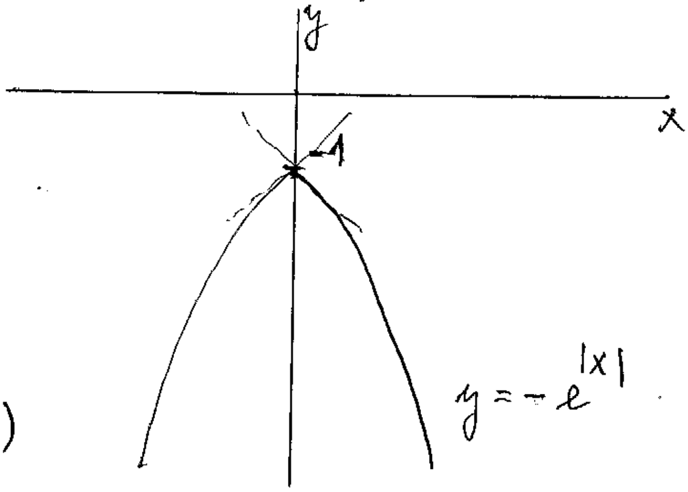
$Df = R$, funkce k je sudá,

$k(x)<0$ v Df, $k(0)=-1$

(„otočený" graf fce e^x pro $x \geq 0$

tj. $k(x) = -e^x$ pro $x \geq 0$,

v $(-\infty, 0\rangle$ souměrně - sudost)



7. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$; $\mathcal{D}f=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

f^{-1} je inverzní k f (v $\mathcal{D}f$), když: $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ (pro $x\in\mathcal{D}f$, $y\in\mathcal{H}f$)

Tedy řešíme „pro x" rovnici $f(x)=y$:

$$\frac{x+1}{x-2}=y \quad \Big|\cdot(x-2)$$

$$x+1=y\,(x-2)$$

$$x(1-y)=-2y-1 \qquad \text{pro } y\neq 1$$

$$x=\frac{2y+1}{y-1} \quad \left(\equiv f^{-1}(y)\right),\ y\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$$

a „vyměníme-li" $x\leftrightarrow y$, pak $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$, $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

Grafy: